Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 2

Congruência de Triângulos e Aplicações - Parte 2

Oitavo Ano

Autor: Prof. Ulisses Lima Parente
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

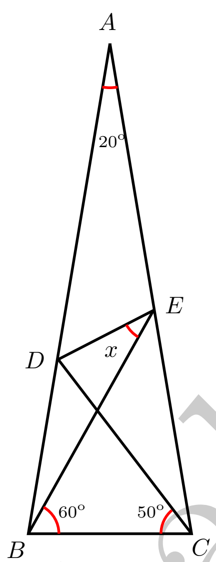
PORTAL DA MATEMÁTICA
OBMEP

Este material teórico coleciona algumas aplicações interessantes dos casos de congruência de triângulos estudados na primeira parte.

1 O problema do triângulo russo

O objetivo dessa seção é resolver o problema abaixo, que é conhecido como **problema do triângulo russo**. Originalmente, esse problema foi proposto na *All-Russian Mathematical Olympiad*[1], a olimpíada nacional de Matemática da extinta União Soviética. Conforme o leitor pode perceber após uma leitura cuidadosa, esse problema ressalta a igualdade dos lados adjacentes à base de um triângulo isósceles, que por sua vez decorre do caso de congruência LAL.

Exemplo 1. *Sabendo que o triângulo abaixo é isósceles de base $\overline{BC}$, calcule a medida x do ângulo $\angle BED$.*



Solução. Começamos observando que, sendo ABC um triângulo isósceles, temos:

$$A\widehat{B}C = A\widehat{C}B = \frac{180^\circ - B\widehat{A}C}{2} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Daí segue que $D\widehat{B}E = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$ e que $E\widehat{C}D = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$ (veja a figura 1).

Denominamos por F o ponto de interseção dos segmentos BE e CD. Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e aplicando esse resultado

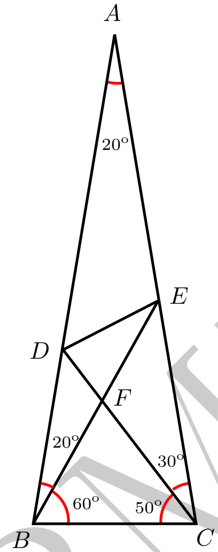


Figura 1: o problema do triângulo russo.

ao triângulo BCF, temos:

$$\begin{aligned} F\widehat{B}C + B\widehat{C}F + B\widehat{F}C = 180^\circ &\Rightarrow 60^\circ + 50^\circ + B\widehat{F}C = 180^\circ \\ &\Rightarrow 110^\circ + B\widehat{F}C = 180^\circ \\ &\Rightarrow B\widehat{F}C = 180^\circ - 110^\circ \\ &\Rightarrow B\widehat{F}C = 70^\circ. \end{aligned}$$

Observe agora que $\angle BFC$ e $\angle DFE$ são OPV. Logo, $B\widehat{F}C = D\widehat{F}E = 70^\circ$. Note também que

$$180^\circ = B\widehat{F}E = B\widehat{F}C + C\widehat{F}E \Rightarrow C\widehat{F}E = 110^\circ.$$

Utilizando mais algumas vezes o argumento acima (sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo ser sempre igual a $180°$), obtemos ainda $B\widehat{F}D = 110^\circ$, $B\widehat{D}F = 50^\circ$ e $F\widehat{E}C = 40^\circ$ (veja a figura 2).

Ainda de acordo com a figura 2, veja que os triângulos EAB e BCD são isósceles, com bases respectivamente $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Portanto, temos

$$EA = EB \quad \text{e} \quad BC = BD.$$

Considere, agora, o ponto $G \in \overline{AC}$, tal que $C\widehat{B}G = 20^\circ$. Então temos $B\widehat{G}C = 80^\circ$, pois a soma dos ângulos internos de BCG é igual a 180°, o que implica BCG isósceles com base CG. Logo, obtemos

$$BG = BC = BD.$$

Daí, segue que o triângulo BDG é isósceles com base $\overline{DG}$. Mas, como

$$D\widehat{B}G = D\widehat{B}F + F\widehat{B}G = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ,$$

[1] *Olimpíada de Matemática de Todas as Rússias*, em tradução livre.

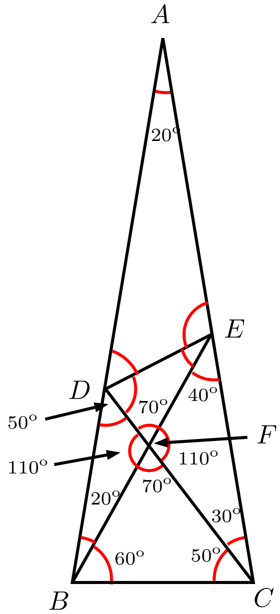
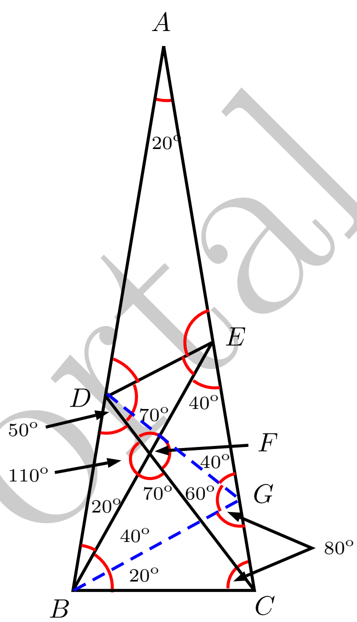


Figura 2: ângulos no triângulo russo.

concluímos que BDG é, de fato, equilátero. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} D\widehat{G}E &= 180^{\text{o}} - (D\widehat{G}B + B\widehat{G}C) \\ &= 180^{\text{o}} - (60^{\text{o}} + 80^{\text{o}}) \\ &= 180^{\text{o}} - 140^{\text{o}} = 40^{\text{o}}. \end{aligned}$$



Finalmente, note que o triângulo BGE é isósceles de base $\overline{BE}$, pois os ângulos adjacentes à base medem ambos 40^{o}. Então,

$$DG = BG = EG,$$

e segue que DEG também é isósceles, com base DE.

Por fim, como a soma dos ângulos internos de DEG é igual a 180^{o}, cada ângulo da base mede $40 + x$ e o outro ângulo interno mede 40^{o}, temos:

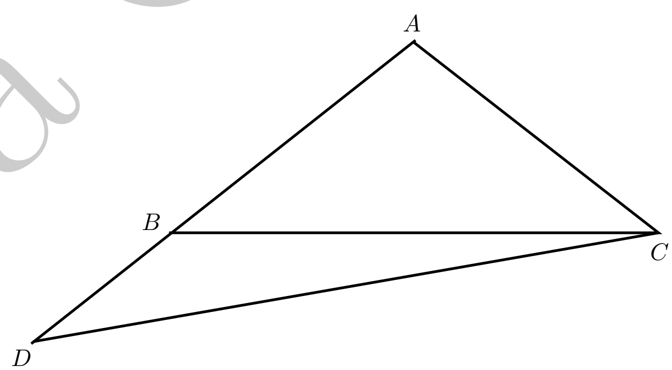
$$\begin{aligned} 2(40^{\text{o}} + x) + 40^{\text{o}} = 180^{\text{o}} &\Rightarrow 80^{\text{o}} + 2x + 40^{\text{o}} = 180^{\text{o}} \\ &\Rightarrow 2x = 180^{\text{o}} - 120^{\text{o}} = 60^{\text{o}} \\ &\Rightarrow x = \frac{60^{\text{o}}}{2} = 30^{\text{o}}. \end{aligned}$$

□

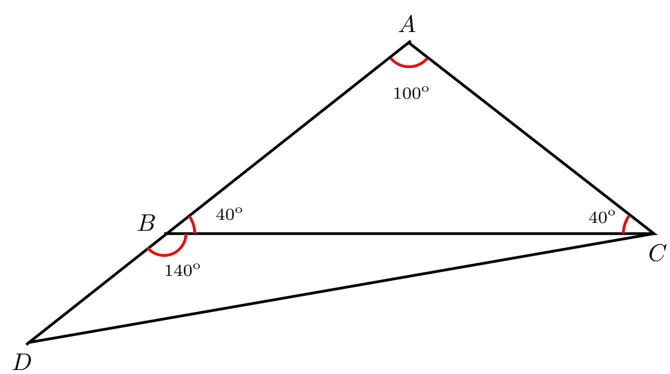
2 Um outro problema envolvendo ângulos em um triângulo

O problema que discutimos nesta seção ressalta o fato, já utilizado no problema anterior, de que por vezes uma *construção auxiliar* facilita bastante a análise de um problema.

Exemplo 2. *Nas notações da figura abaixo, temos $B\widehat{A}C = 100^o$, $AB = AC$ e $AD = BC$. Calcule, com justificativa, a medida do ângulo $\angle BCD$.*



Solução. Começamos observando que, como $AB = AC$, o triângulo ABC é isósceles de base BC.



Além disso, a partir de $B\widehat{A}C = 100^o$, obtemos:

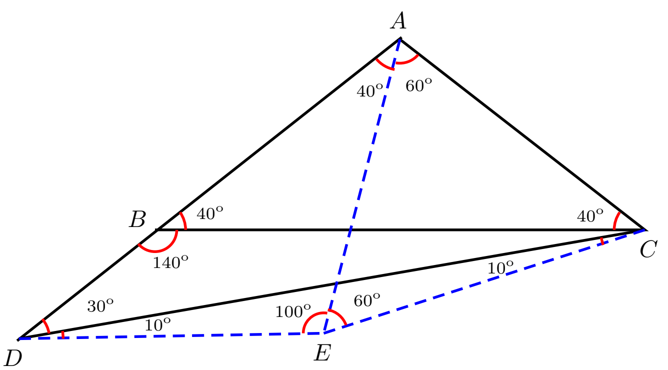
$$A\widehat{B}C = A\widehat{C}B = \frac{180^o - 100}{2} = \frac{80^o}{2} = 40^o.$$

Ainda temos que $D\widehat{B}C = 140^o$, pois $\angle DBC$ e $\angle ABC$ são suplementares.

Agora, considere o triângulo ADE, congruente a ABC, onde E pertence ao mesmo semiplano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AD}$ que contém o triângulo ABC. Então, $D\widehat{A}E = 40^o$ e, assim:

$$E\widehat{A}C = D\widehat{A}C - D\widehat{A}E = 100^o - 40^o = 60^o.$$

Mas, como $AE = AC$, segue que EAC é isósceles de base EC, com ângulo do vértice igual a $60°$. Então, AEC é mesmo equilátero, de sorte que $EC = EA$.



Concluímos, pois, que

$$ED = EA = EC,$$

e o triângulo EDC é isósceles de base CD. Além disso,

$$D\widehat{E}C = D\widehat{E}A + A\widehat{E}C = 100^o + 60^o = 160^o.$$

Logo, cada ângulo da base de EDC mede 10^o, e concluímos que

$$\begin{aligned} B\widehat{C}D &= A\widehat{C}E - A\widehat{C}B - D\widehat{C}E \\ &= 60° - 40° - 10° = 10°. \end{aligned}$$

$\square$

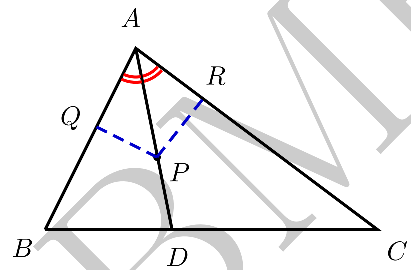
3 Sobre as principais cevianas de um triângulo

Uma **ceviana** de um triângulo é qualquer segmento que liga um vértice do triângulo à reta suporte do lado oposto. Dado um triângulo ABC, a **bissetriz interna** relativa ao vértice A é o segmento de reta contido na bissetriz do ângulo $B\widehat{A}C$ e que vai desde o vértice A até o lado $\overline{BC}$. Analogamente, podemos definir as bissetrizes internas relativas aos vértices B e C.

É claro que as bissetrizes internas de um triângulo qualquer são exemplos de cevianas do mesmo. A seguir, apresentamos uma propriedade bastante importante dos pontos que estão sobre uma bissetriz interna de um triângulo qualquer.

Proposição 3. *Se P é um ponto sobre a bissetriz interna $\overline{AD}$ do triângulo ABC, então $d(P, \overline{AB}) = d(P, \overline{AC})$.*

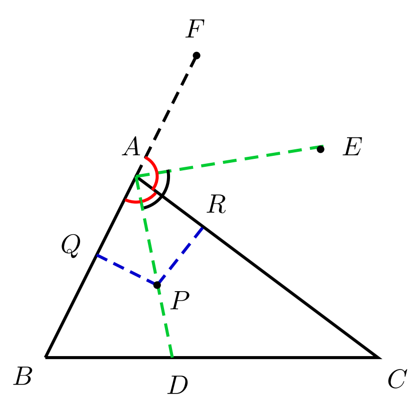
Prova. Sejam Q e R, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P a $\overline{AB}$ e a $\overline{AC}$.



Então, os triângulos APQ e APR são congruentes pelo caso ALAo, pois AP é um lado comum aos mesmos, os ângulos $\angle PAQ$ e $\angle PAR$ têm a mesma medida (que é a metade da medida de $\angle BAC$) e, além disso, $P\widehat{Q}A = P\widehat{R}A = 90^o$. A partir dessa congruência, obtemos $PQ = PR$, ou seja, $d(P, \overline{AB}) = d(P, \overline{AC})$. $\square$

As **bissetrizes externas** de um triângulo qualquer são as bissetrizes dos ângulos externos do triângulo. É importante observar que um resultado análogo ao enunciado na Proposição 3 também é válido para uma bissetriz externa qualquer. De fato, esse resultado vale para a bissetriz de um ângulo qualquer, e não é simplesmente uma propriedade dos pontos que estão sobre a bissetriz, mas a caracteriza como o conjunto dos pontos que equidistam dos lados do ângulo em questão.

Observamos ainda que (veja a figura a seguir), se $\overrightarrow{AD}$ e



$\overrightarrow{AE}$ são, respectivamente, as bissetrizes interna e externa do triângulo ABC, então $D\widehat{A}E = 90^o$. Com efeito, a partir de

$$B\widehat{A}D + D\widehat{A}C + C\widehat{A}E + E\widehat{A}F = 180^o,$$

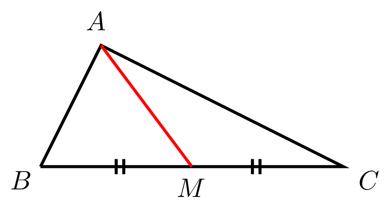
temos

$$2D\widehat{A}C + 2C\widehat{A}E = 180^o$$

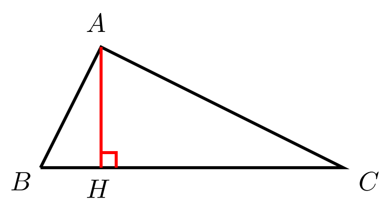
ou, o que é o mesmo, $2(D\widehat{A}C + C\widehat{A}E) = 180^o$. Então,

$$D\widehat{A}E = D\widehat{A}C + C\widehat{A}E = 90^o.$$

Dado um triângulo ABC, definimos a **mediana** relativa ao vértice A como sendo o segmento $\overline{AM}$, onde M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Analogamente, definimos as medianas relativas aos vértices B e C.



Definimos ainda a altura do triângulo ABC relativa ao vértice A (ou relativa à base BC) como a medida do segmento $\overline{AH}$, onde H é o pé da perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que passa pelo vértice A. Também podemos definir, de forma análoga, as alturas relativas aos vértices B e C.



Um resultado famoso, conhecido como o **Teorema de Ceva** dá uma condição necessária e suficiente para que três cevianas de um triângulo, uma partindo de cada um de seus vértices, sejam concorrentes. Uma consequência relativamente imediata desse teorema é que as bissetrizes internas, as medianas e as alturas de um triângulo qualquer são sempre concorrentes. Para uma demonstração do Teorema de Ceva, veja a Seção 4.4 de [1].

Dicas para o Professor

Sugerimos que sejam utilizadas três sessões de 50min para discutir todo o conteúdo desse material (uma sessão de 50min para para seção). Faça o problema do triângulo russo com bastante calma, pois o excesso de triângulos que aparecem na figura pode acabar confundindo o estudante. Essa mesma observação vale para o problema resolvido na seção 2.

Para abordagem diferente ao problema do triângulo russo, veja a sugestão ao problema 22 da Seção 2.3 de [1]. As referências [1] e [2] trazem vários outros problemas interessantes envolvendo o conceito de congruência de triângulos.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro, SBM, 2013.

2. O. Dolce e J. N. Pompeo. *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 9: Geometria Plana.* São Paulo, Atual Editora, 2012.