2. CONTAGEM E COMBINATÓRIA

Nesta parte apresentamos problemas que fazem uma transição entre o tema Geometria e problemas de Contagem e Combinatória. Todos os problemas abordados têm forte apelo geométrico, mas o último traz uma referência à Aritmética.

Em alguns problemas optou-se por apresentação parcial ou de variação que facilita o trabalho de compreensão do principal conteúdo e o estabelecimento de estratégias de solução. Assim, os primeiros problemas que estão relacionados com o BQ – OBMEP 2012, não se apresentam como está nesta obra, mas já com o formato para aplicação em sala de aula. Todavia, sempre que a exploração envolver a situação proposta no problema será destacado na apresentação do mesmo.

Vale destacar que as atividades em sequência como exposto, já foram trabalhadas com sucesso em diferentes escolas e grupos de alunos (sala de aula ou preparatório para participação em Olimpíadas).

2.1. PROBLEMA 1 – BQ – OBMEP 2012 – NÍVEL 1 – QUESTÃO 21 (PARTE 1)

Ana quer colorir as bolinhas, da Figura 1, ao lado, de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.
(a) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 1?

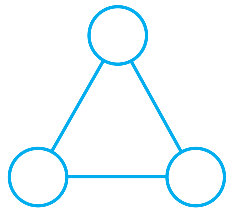
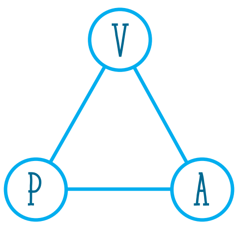
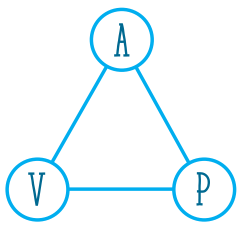


Figura 1

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: Este é um dos problemas em que se optou pela apresentação diferenciada da constante no BQ. A apresentação parcial e quebrada em várias partes visa à compreensão do enunciado do problema, focando nas ideias essenciais do conteúdo abordado. Para uma abordagem em sala de aula, onde se deseja que o aluno possa, por si, chegar à compreensão do enunciado e adquirir independência para formular hipóteses para resolução, especialmente nas séries iniciais, é importante iniciar por casos mais simples para compreender os conceitos fundamentais. Com este procedimento é possível discutir que o dado inicial mais importante é a figura ter o formato triangular com seus vértices como posições a serem coloridas e não o tipo de triângulo em questão, pois se problemas que envolvem a simetria das figuras já tiverem sido trabalhados, é comum, no início da discussão, que a atenção seja voltada para este aspecto. Uma discussão cuidadosa possibilita a conclusão de que o fato relevante contido nos dados do problema consiste na ligação entre as bolinhas, duas a duas e não a aparente simetria da figura. Somente depois da discussão da apresentação do primeiro quadro é que se recomenda a apresentação do restante, como segue:

Vejam duas maneiras diferentes de colorir a Figura 1.





Observa-se que a interpretação dos exemplos anteriores, que fazem parte do enunciado do problema da OBMEP, é, na nossa recomendação, deliberadamente adiada para momento posterior à análise dos dados, para permitir um trabalho que valorize a discussão das diferentes interpretações, e, a partir delas, se possa construir a interpretação que aparece no enunciado do problema com a colocação das figuras. Mais precisamente, se os exemplos ilustrativos da situação-problema forem apresentados junto com o enunciado, perde-se uma oportunidade para exercitar a compreensão do mesmo.

Após a discussão, e antes mesmo de definir estratégias para a resolução do problema, é importante que se experimente pintar figuras em uma folha, com mais desenhos do que o necessário, de modo que quem faz a coloração possa perceber *per si* uma estratégia para contagem. Um modelo de folha para esta atividade encontra-se na página 93.

Ao executar a tarefa de colorir as várias figuras da folha de atividade, percebe-se que uma maneira de organizar as várias possibilidades como solução é a tomada de decisões sobre a cor em cada vértice da figura. A sistematização deste trabalho leva à estratégia de utilização da árvore de possibilidades como um procedimento que pode e deve ser introduzido como uma técnica de aprendizagem desde o 6º ano do Ensino Fundamental. A estrutura da árvore de possibilidades permite perceber o princípio multiplicativo de contagem, pela observação de que todos os "ramos" têm o mesmo número de possibilidades e é importante sistematizar este conteúdo para posteriormente diferenciá-lo do princípio aditivo, presente no próximo problema escolhido.

2.2. PROBLEMA 2 – BQ – OBMEP 2012 – NÍVEL 1 – QUESTÃO 21 (PARTE 2)

Ana também quer colorir as bolinhas da Figura 2, ao lado, de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.

(b) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 2? Vejam duas maneiras de colorir as bolinhas:

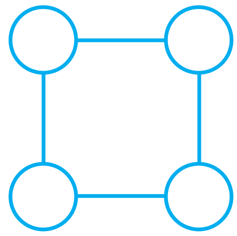
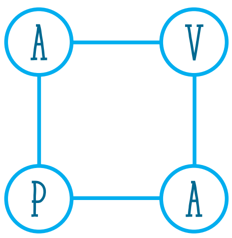
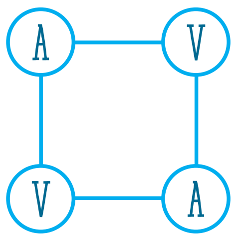


Figura 2





RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: A abordagem proposta para este problema segue as mesmas recomendações do problema anterior: colorir os vértices de quadrados em uma folha impressa em que constem mais quadrados do que o resultado da contagem e, montar a árvore de possibilidades. Depois de montada a árvore, identificar e destacar os casos, separando-os quando se utilizar duas ou três cores, assim estabelecendo a conexão do princípio de adição com a utilização do conectivo "ou". É importante finalizar a abordagem do problema com sistematização organizada dos princípios de contagem (aditivo e multiplicativo) trabalhando a diferença entre os conectivos "e" e "ou". Uma exploração didática do problema que leva à compreensão dos elementos importantes envolvidos no problema, consolidando as ideias que foram desenvolvidas por meio da resolução do problema, pode ser vista nos próximos quadros apresentados, os quais, recomendamos, sejam trabalhados um a cada vez:

Retomando as Figuras 1 e 2 ...

(c) Qual a diferença fundamental entre as Figuras 1 e 2 que produz resultados diferentes nas duas contagens?

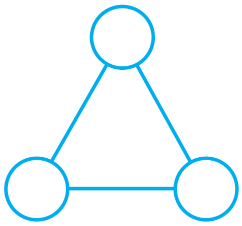


Figura 1

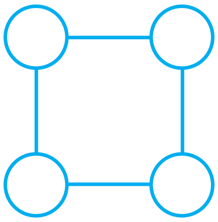


Figura 2

Ainda contando...

(d) O que ocorre se acrescentarmos uma das diagonais do quadrado? Altera o resultado da contagem das maneiras de colorir a Figura 2?

(e) E se unirmos as bolinhas diagonalmente opostas por um caminho fora da figura?

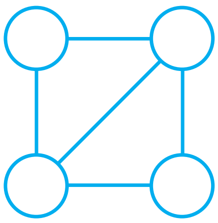


Figura 3

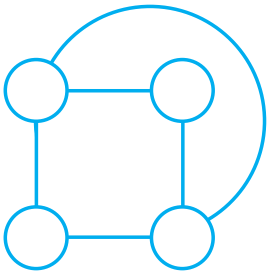


Figura 4

(f) De quantas maneiras diferentes podemos colorir a figura a seguir?

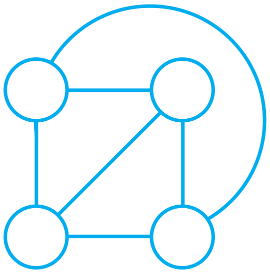


Figura 5

(g) Qual o número mínimo de cores que devemos usar para unir as bolinhas, diagonalmente opostas, para que um caminho, fora da figura tenha solução?

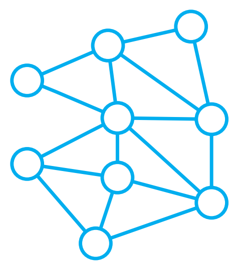
O fato mais importante na exploração das diferentes figuras é perceber que o caso com uma diagonal é equivalente ao do triângulo, e que o ponto principal não é a forma da diagonal, mas, sim, o fato dos dois vértices opostos estarem ligados entre si (como mostra a Figura 4). A proposta seguinte em que os dois pares de vértices opostos estão ligados tem como objetivo reforçar esta ideia e levar à conclusão que, para este caso, o problema só tem solução se acrescentarmos mais uma cor. Neste caso é importante que sejam realizadas colorações com quatro cores.

Recomenda-se registrar por escrito as conclusões alcançadas.

Lembramos que, para usar a Resolução de Problemas como estratégia de ensino e aprendizagem, uma atividade importante é a fase que segue à solução do problema. É a oportunidade de investigação que não apenas valida a solução obtida, mas que permite estender a compreensão do conteúdo trabalhado por meio de questionamentos adequados para as variações do problema original.

2.3. PROBLEMA 3 – QUESTÃO 13 – NÍVEL 1 – 1ª FASE – OBMEP 2012

De quantas maneiras é possível colorir cada um dos círculos da figura ao lado com uma das cores preto (P), azul (A) e vermelho (V), de modo que dois círculos ligados por um segmento tenham sempre cores diferentes?



RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: A proposta é seguir o padrão de abordagem adotado, até o momento, com os problemas precedentes: a primeira atividade sendo a de colorir réplicas da figura em uma folha, lembrando-se da importância de haver mais figuras do que as diferentes formas de colorir para se chegar à conclusão de que o problema de colorir esta figura é equivalente ao caso do triângulo do Problema 1. Um questionamento que pode ser feito para conduzir à conclusão desta equivalência é indagar se existe alguma bolinha que possa estar ligada a outras duas coloridas com a mesma cor.

Ainda neste caso é interessante construir uma árvore de possibilidades e discutir a dificuldade que este trabalho requer, preparando o terreno para a postura de busca por estratégias de contagem advindas de casos mais simples.

O fechamento da discussão deste problema deve ser conduzido para o reconhecimento de que não importa de qual bolinha se começa a contagem, e comparar, caso tenha sido trabalhado o Problema 2, a estratégia da contagem com os do quadrado com uma diagonal ou sem uma diagonal. Observe o texto a seguir de P. C. Carvalho sobre estratégias para resolver problemas de contagem.

Qual é a estratégia para resolver problemas de contagem?

Postura • Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.

Divisão • Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão.

Não adiar dificuldades • Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, esta é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Carvalho, P.C. – Métodos de Contagem e Probabilidade – PIC – OBMEP. p. 7

2.4. PROBLEMA 4 – BQ – OBMEP 2012 – 1 – QUESTÃO 21 – NÍVEL 1 – VARIAÇÃO

Para compreender e, também, ilustrar os princípios listados no último parágrafo, o Problema inicia com uma variação de um problema do BQ, investigando um caso simplificado para preparar a abordagem do problema em si.

Como já destacado anteriormente, ao conduzir a Resolução de Problemas é importante fazer questionamentos adequados para propiciar o desenvolvimento do raciocínio. Também, considerando que o melhor ao resolver um problema de contagem é não adiar dificuldades, os primeiros questionamentos devem ser no sentido de conduzir à identificação da "maior dificuldade" na contagem, que aparece na bolinha com maior número de conexões (maior grau de incidência no grafo correspondente). Pelos princípios descritos, é por esta bolinha que iniciamos a contagem.

A proposição do problema como aparece no BQ da OBMEP, enfatiza o princípio trabalhado e a importância da abordagem de casos mais simples.

Ana ainda quer colorir as bolinhas da Figura 6, ao lado, de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que as bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.
(h) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 6?

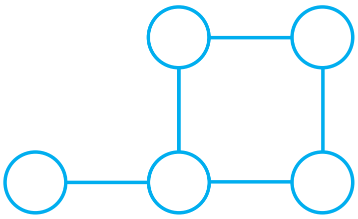


Figura 6

Após explorar a variação mais simples, o problema do BQ se torna mais claro. Agora, basta decidir, qual seria a escolha natural da bolinha por onde devemos montar o esquema de contagem.

Ana ainda quer colorir as bolinhas da Figura 7, ao lado, de azul (A), preto (P) ou vermelho (V) de modo que as bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.
(i) De quantas maneiras diferentes Ana pode colorir a Figura 7?

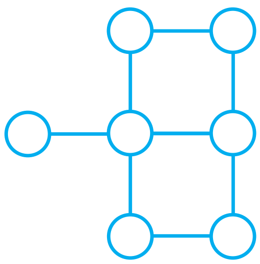
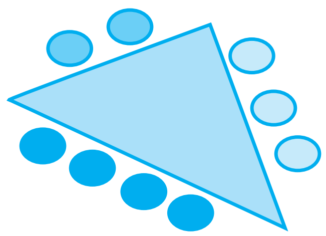


Figura 7

2.5. PROBLEMA 5 – OBMEP 2012 – 1ª FASE – QUESTÃO 18 – NÍVEL 3

Seis amigos, entre eles Alice e Bernardo, vão jantar em uma mesa triangular, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares, como na figura. De quantas maneiras estes amigos podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Bernardo fiquem juntos e em um mesmo lado da mesa?



RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: Os questionamentos iniciais para atacar este problema são:

1. Por onde é melhor começar a contagem? O que leva a observar a mesa com 3 lados que sugerem ser considerados caso a caso para o casal sentar?
2. Facilita a contagem pensar no casal agrupado? A informação do problema sugere que o casal seja contado como uma unidade?

A estratégia de considerar os lados da mesa para as posições em que o "casal" pode se sentar, como casos distintos que podem ser computados, pelo princípio aditivo, surge de maneira natural. Logo (1 + 2 + 3) = 6, é o número de maneiras que o casal pode sentar-se em cada um dos lados da mesa. Depois que o casal se sentar, para cada caso sobram 7 lugares que devem ser ocupados por 4 amigos restantes, e o princípio multiplicativo fornece a contagem de 7 x 6 x 5 x 4 = 840 maneiras. Como o casal pode trocar de lugar entre si, o número total de maneiras que os amigos podem se sentar à mesa é {2 x [6 x 840]} = 10080.

2.6. PROBLEMA 6 – QUESTÃO 16 – NÍVEL 2 – 1ª FASE – OBMEP 2012

Quantos são os números naturais entre 0 e 999 nos quais aparece pelo menos um algarismo 2 e nenhum algarismo 3?

Neste problema a dificuldade de apresentar uma listagem, resultante da contagem caso a caso, deve servir de motivação para questionamentos que levem à discussão de quais são as restrições mais significativas. Como sempre, o trabalho deve ser conduzido tendo em vista generalizações que não devem ser propostas no momento em que o problema está sendo pensado. O foco precisa estar, inicialmente, sobre os questionamentos que levem à reflexão sobre os dados e se a posição que os algarismos 2 ou 3 ocupam na escrita dos números é importante ou não, o que pode conduzir à percepção de estratégia adequada de contagem. Para levar os alunos a perceberem o que ocorre, uma sugestão é iniciar com os números de 1 a 99, identificando os argumentos que justificam as respostas, neste caso simplificado. Após isto, ampliar para a primeira centena, de modo a perceber o padrão na argumentação e descobrir qual é a restrição que implica a solução.

A partir da discussão de casos mais simples pode-se discutir se é mais conveniente começar com a restrição "não ter o algarismo 3" ou com a restrição "ter o algarismo 2". Começando com não ter o algarismo 3, pode-se, a seguir, retirar os que não tem o algarismo 2, ficando com os que não tem o algarismo 3 e tem o algarismo 2: o total de números entre 0 e 999 que não possui o algarismo 3 é: 9 x 9 x 9, retirando-se, dentre estes, os que não tem o algarismo 2 ficamos com 9 x 9 x 9 – 8 x 8 x 8 = 217. Por outro lado, se começamos com a contagem considerando ter o algarismo 2, teremos mais casos a analisar: "ter apenas um algarismo 2" (que se divide em estar na casa das unidades, das dezenas, ou das centenas) ou "ter dois algarismos 2" (unidade e dezena, unidade e centena, ou dezena e centena) ou "ter três algarismos 2", o que nos conduz à expressão: (3 x 8 x 8) + (8 + 8 + 8) + 1 = 192 + 24 + 1 = 217. Destaque-se que na primeira forma de contagem trabalha-se com uma dupla negação, que nem sempre é fácil de ser percebida por alunos do Ensino Fundamental. Para este nível de ensino, a contagem pode ser por identificação de casos. Assim, com grupos de alunos do Ensino Fundamental, pode ser abordada a contagem direta separando caso a caso, uma vez que é nestas séries que se discute o sistema decimal posicional e as operações com números naturais. Para os alunos de Ensino Médio, que já trabalham com a ideia de conjunto complementar, a primeira forma é a mais direta (e não adia nenhuma dificuldade): conta-se quantos não tem o algarismo 3 e retira-se (dupla negação) os que não tem o algarismo 2, chegando-se aos que não tem o algarismo 3 e tem o algarismo 2, diretamente.

2.7. PROBLEMA 7 – BQ - OBMEP 2012 – QUESTÃO 26 – NÍVEL 1

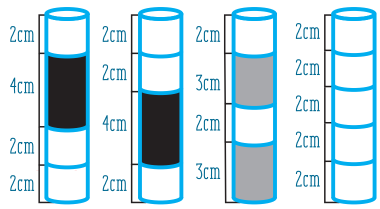
Este é um problema em que a exploração das propriedades da aritmética está contextualizada em uma situação geométrica. Recomenda-se, nas séries iniciais, que a abordagem seja feita por meio de simulações empíricas que conduzam ao argumento completo.

Caroba tem várias peças em forma de cilindro de três tipos:

a) brancas de 2cm de altura

b) cinzas de 3cm de altura

c) pretas de 4cm de altura



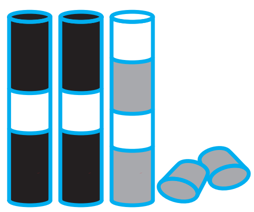
Com estas peças ela pode montar torres de 10cm.

Descrevemos cada torre listando as alturas de suas peças, debaixo para cima; por exemplo, as torres da figura anterior, da esquerda para a direita, são descritas por (2,2,4,2), (2,4,2,2), (3,2,3,2) e (2,2,2,2):

a) Descreva todas as diferentes torres de 10cm que a Caroba pode fazer com três peças.

b) Com 12 peças, sendo 4 de cada uma das cores, a Caroba conseguiu montar 3 torres de 10cm, tendo sobrado duas peças de 2cm, como na figura abaixo. Descreva como a Caroba pode montar 7 torres de 10cm, se ela possuir 27 peças, sendo 9 de cada uma das cores.

c) Explique porque a Caroba não vai conseguir montar 8 torres de 10cm, se ela possuir 27 peças, sendo 9 de cada uma das cores.



Seguem alguns questionamentos que podem ser feitos para estimular o raciocínio dos alunos:

- É possível montar as 7 torres utilizando todas as peças?
- Você consegue descrever uma situação em que sobre um menor número de peças? Quais são estas peças?

RECOMENDAÇÕES PARA O PROFESSOR: É importante lembrar que a dinâmica de uma aula de Resolução de Problemas depende de se proporcionar tempo apropriado para que cada aluno possa explorar e utilizar seu próprio conhecimento na compreensão do problema e montagem das estratégias de resolução. O papel do professor deve ser o de instigar o raciocínio, fornecendo, oportunamente, perguntas-chave que auxiliem no caminho da descoberta do aluno, sem, no entanto, oferecer a solução. Ao explorar o problema com os alunos, o professor poderá manipular modelos concretos, por exemplo, usando tiras coloridas de papel com medidas correspondentes, para explorar propriedades aritméticas como: decomposição de um número em diferentes parcelas; comutatividade e associatividade da adição; divisibilidade, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição; algoritmo da divisão.

O registro de resultados de cada experiência manipulativa que os alunos tenham realizado é uma rica oportunidade de exercitar a sistematização das propriedades algébricas das operações aritméticas que preparam o pensamento algébrico nos anos seguintes do Ensino Fundamental.