Módulo de Função Quadrática

Gráfico de uma Função Quadrática

1^a série E.M.

Professores Tiago Miranda e Cleber Assis

Função Quadrática
Gráfico de uma Função Quadrática

1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Determine a concavidade da parábola e o número de zeros reais de cada uma das funções abaixo.

a) $y = x^2 - 10x + 21$.

b) $y = -x^2 + 8x - 12$.

c) $y = x^2 + 18x + 81$.

Exercício 2. Determine as raízes, o vértice e o pontos de interseção com eixo das ordenadas das seguintes funções

a) $y = x^2 - 5x + 4$

b) $y = -x^2 - 6x + 16$

c) $y = x^2 + 4x$

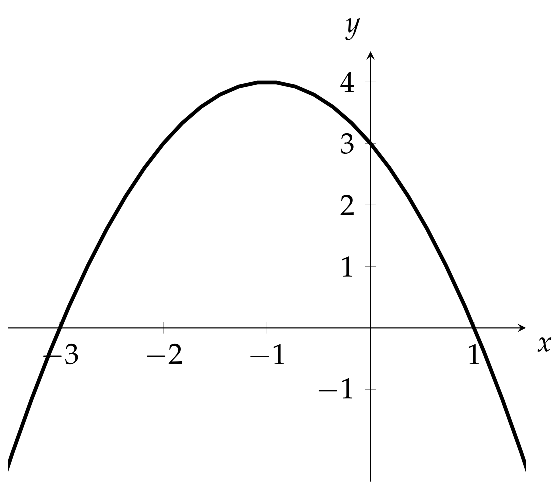
d) $y = -x^2 + 9$

e) $y = x^2 - 6x + 9$

Exercício 3. Analise os gráficos do exercício anterior e determine os respectivos eixos de simetria em cada parábola.

Exercício 4. Esboce um gráfico e determine uma função que tenha eixo de simetria igual $x = 2$, valor máximo igual a 9 e que uma de suas raízes seja igual a 5.

Exercício 5. Observe o gráfico abaixo de uma parábola e conclua a sua respectiva lei da função.



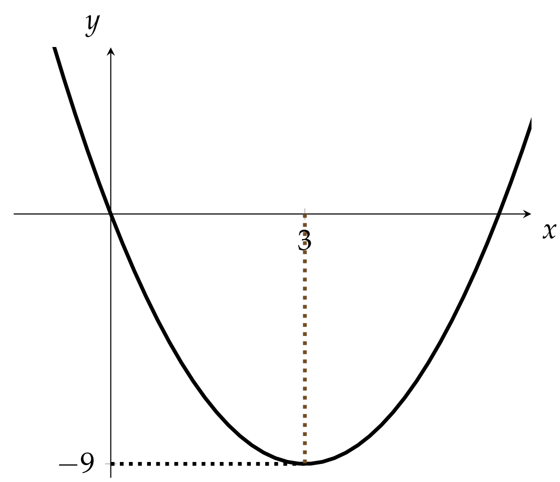
Exercício 6. Qual a o conjunto imagem da função

$$y = x^2 - 10x + 21?$$

Exercício 7. A função $y = kx^2 - 8x + k$ tem como conjunto imagem $]-\infty; 0]$, qual o valor de k?

2 Exercícios de Fixação

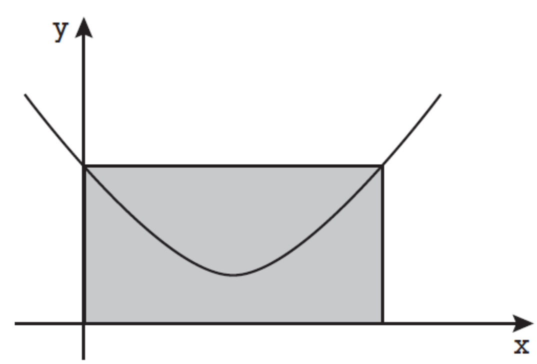
Exercício 8. Observe o gráfico abaixo cujo ponto destacado é o vértice da função. Qual a lei que representa essa função?



Exercício 9. Todos os elementos do domínio da função $y = (m + 1)x^2 - 2(m - 2)x + m$ têm imagens positivas. Sendo assim, qual o menor valor inteiro que m pode assumir?

Exercício 10. Esboce um gráfico e determine uma lei para uma função que tenha eixo de simetria a reta $x = 4$, suas raízes distem 10 unidades entre si e a intersecção com o eixo y seja no ponto $(0, -18)$.

Exercício 11. A parábola da figura abaixo representa o gráfico da função $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Qual o valor da área do retângulo sombreado abaixo?



Exercício 12. Determine o conjunto imagem em cada função abaixo observando o domínio definido.

a) $y = x^2 - 4x + 3$ com $D_f = \mathbb{R}$.

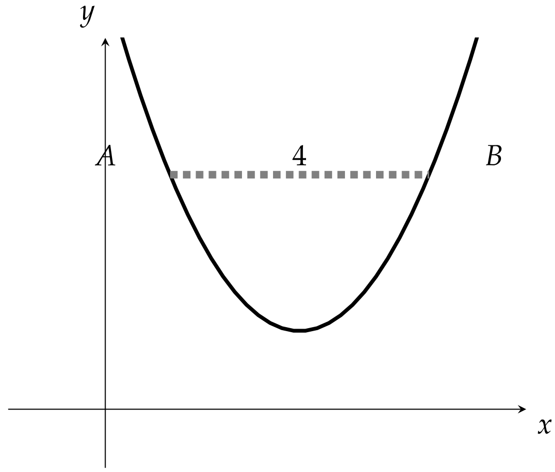
b) $y = -x^2 + 9x - 14$ com $D_f = \mathbb{R}$.

c) $y = x^2 + 9x$ com $D_f = [-9, 0]$.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

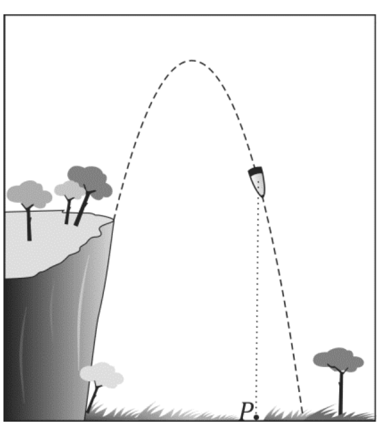
Exercício 13. Seja $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real tal que $f(x) = (x-1)(x-3)$. Qual o conjunto imagem dessa função?

Exercício 14. Na figura abaixo temos o gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Os pontos A e B estão nesse gráfico e o segmento horizontal AB tem comprimento 4. Qual é a distância de AB ao eixo das abscissas?



Exercício 15. Se a função real de variável real, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, é tal que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$ e $f(3) = 4$, então qual o valor de $f(4)$?

Exercício 16. A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



Respostas e Soluções.

1. A concavidade da parábola é determinada pelo sinal de a e o número de raízes reais pelo sinal do Δ, sendo assim:

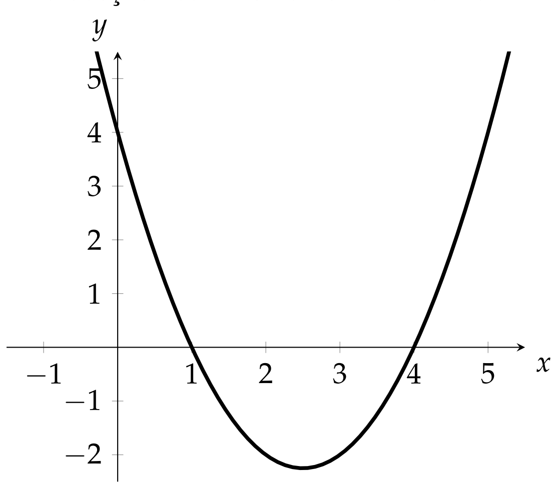
a) Como $a = 1$ a parábola tem concavidade volta para cima e o $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 16 > 0$ determina dois zeros reais distintos.

b) Como $a = -1$ a parábola tem concavidade volta para baixo e o $\Delta = (8)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12) = 16 > 0$ determina dois zeros reais distintos.

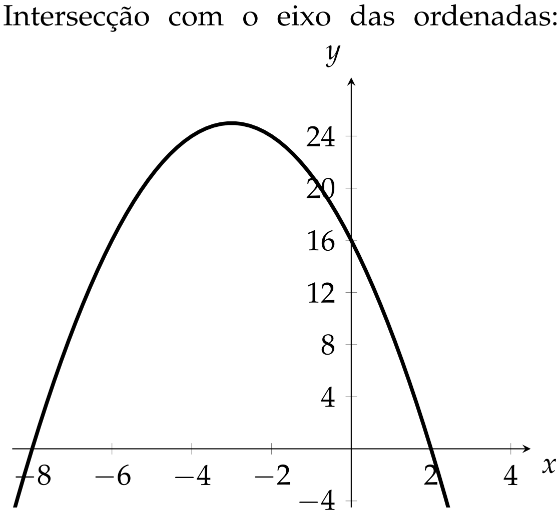
c) Como $a = 1$ a parábola tem concavidade volta para cima e o $\Delta = (18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81 = 0$ determina dois zeros reais iguais (ou apenas um zero real).

2.

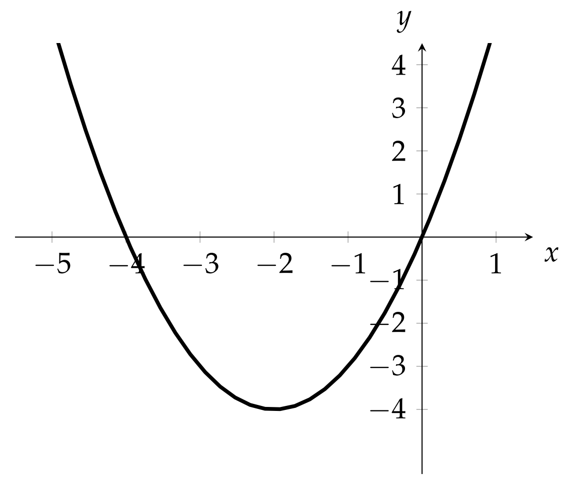
a) Zeros: 1 e 4
Vértice: $x_V = \dfrac{5}{2}$ e $y_V = -\dfrac{9}{4}$
Intersecção com o eixo das ordenadas: $(0; 4)$.



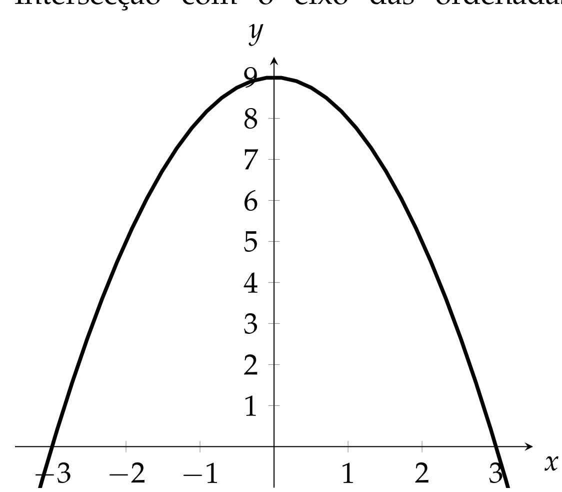
b) Zeros: -8 e 2
Vértice: $x_V = -3$ e $y_V = 25$
Intersecção com o eixo das ordenadas: $(0; 16)$.



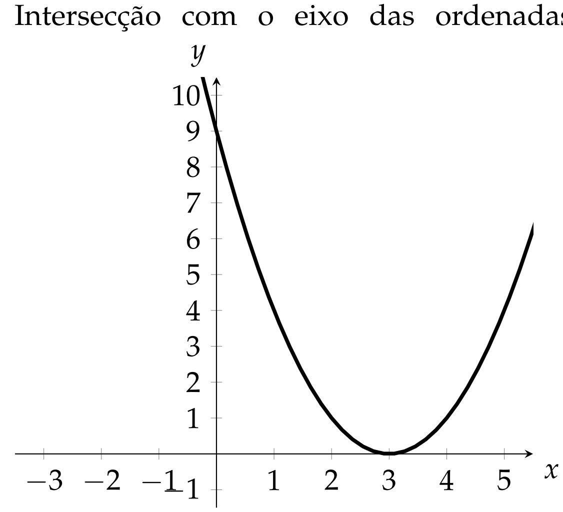
c) Zeros: -4 e 0
Vértice: $x_V = -2$ e $y_V = -4$
Intersecção com o eixo das ordenadas: $(0; 0)$.



d) Zeros: -3 e 3
Vértice: $x_V = 0$ e $y_V = 9$
Intersecção com o eixo das ordenadas: $(0; 9)$.



e) Zero: 3
Vértice: $x_V = 3$ e $y_V = 0$
Intersecção com o eixo das ordenadas: $(0; 9)$.



3. Destacando que o eixo de simetria é a reta perpendicular ao eixo x que passa pela abscissa x_v, teremos que:

a) $x = \dfrac{5}{2}$.

b) $x = -3$.

c) $x = -2$.

d) $x = 0$.

e) $x = 3$.

4. Como a distância entre a raiz dada e o eixo de simetria é 3, a outra raiz é igual a -1. Ainda do enunciado, podemos concluir que o vértice da parábola possui as coordenadas $V(2, 9)$. Utilizando a fatoração

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

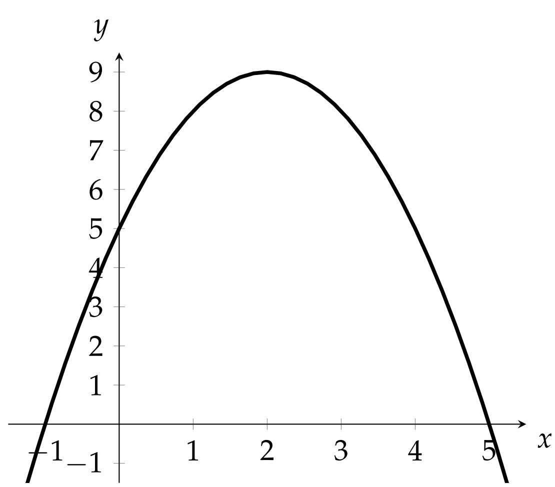
ficamos com

$$\begin{aligned} y &= a(x - (-1))(x - 5) \\ 9 &= a(2 + 1)(2 - 5) \\ a &= -1. \end{aligned}$$

A função procurada é

$$y = -1 \cdot (x + 1)(x - 5) = -x^2 + 4x + 5$$

e o esboço do gráfico é



5. Do gráfico dado, podemos concluir que $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ e o ponto $(0, 3)$ pertence a função. Agora, utilizando a fatoração

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} y &= a(x - (-3))(x - 1) \\ 3 &= a(0 + 3)(0 - 1) \\ a &= -1. \end{aligned}$$

A função fica

$$y = -1 \cdot (x + 3)(x - 1) = -x^2 - 2x + 3.$$

6. Observe que essa função é delimitada inferiormente e seu valor mínimo é

$$\begin{aligned} y_V &= -\frac{\Delta}{4a} \\ y_V &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ y_V &= -\frac{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}{4 \cdot 1} \\ y_V &= -\frac{100 - 84}{4} \\ y_V &= -4. \end{aligned}$$

Por fim, ficamos com $Im = [-4, +\infty[$.

7. Sendo $Im =]-\infty; 0]$, temos $a < 0$ e $y_V = 0$. Daí, podemos escrever

$$\begin{aligned} y_V &= 0 \\ y_V &= -\frac{\Delta}{4a} \\ y_V &= -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ 0 &= -\frac{(-8)^2 - 4k \cdot k}{4k} \\ 4k^2 &= 64 \\ k &= \pm\sqrt{16} \\ k &= \pm 4. \end{aligned}$$

Por fim, como $a < 0$, terminamos com $k = -4$.

8. Observe que que as coordenadas do vértice V são $(3, -9)$ e assim podemos concluir (pelo eixo de simetria) que a segunda raiz é igual a 6. Sendo assim, $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$ e utilizando a fatoração

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} y &= a(x - 0)(x - 6) \\ -9 &= a(3)(3 - 6) \\ a &= 1. \end{aligned}$$

A função fica

$$y = 1 \cdot (x - 0)(x - 6) = x^2 - 6x.$$

9. Como a função é sempre positiva temos que $a > 0$ e $\Delta < 0$. Assim, seguimos com

$$\begin{aligned}
\Delta &< 0 \\
b^2 - 4ac &< 0 \\
[-2(m-2)]^2 - 4(m+1)m &< 0 \\
4(m-2)^2 - 4(m^2+m) &< 0 \\
(m-2)^2 - (m^2+m) &< 0 \\
m^2 - 4m + 4 - m^2 - m &< 0 \\
-5m &< -4 \\
5m &> 4 \\
m &> \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Por fim, o menor inteiro é $m = 1$.

10. Do enunciado, temos que $x_V = 4$, as raízes são $x_1 = -1$ e $x_2 = 9$ e o ponto $(0, -18)$ pertence à função. Sendo assim, aplicando a fatoração

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

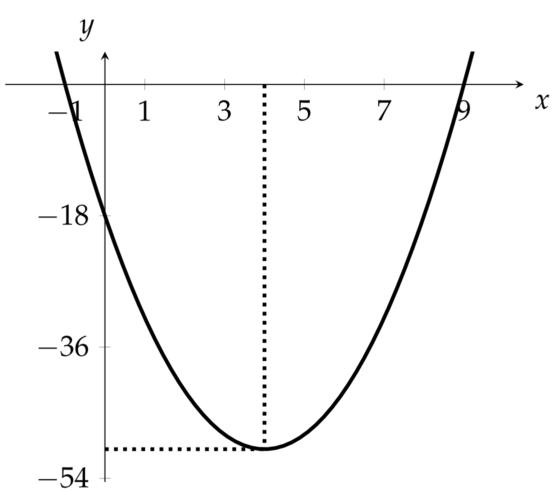
ficamos com

$$\begin{aligned}
y &= a(x - (-1))(x - 9) \\
-18 &= a(0+1)(0-9) \\
a &= 2.
\end{aligned}$$

A função fica

$$y = 2 \cdot (x+1)(x-9) = 2x^2 - 16x - 18.$$

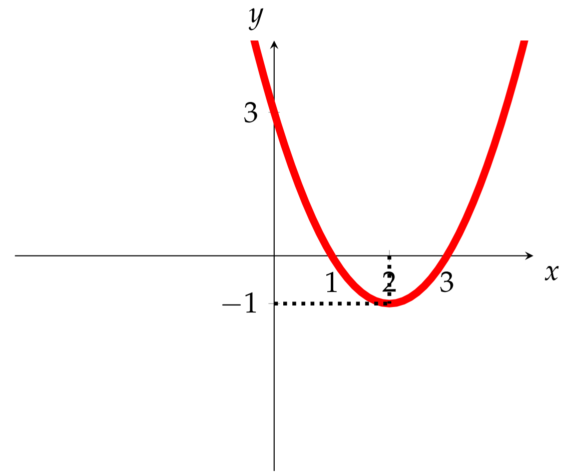
Além disso, o gráfico fica



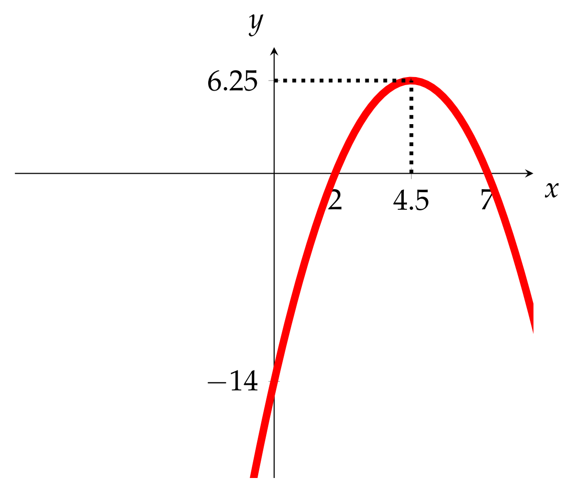
11. O ponto de interseção com o eixo Y é o $(0, 4)$ e a função volta a ter imagem 4 quando $x = 3$. Assim o retângulo tem comprimento 3, altura 4 e área $3 \times 4 = 12$ u.a..

12. Traçando as respectivas funções obtemos todos os gráficos a seguir, ficando

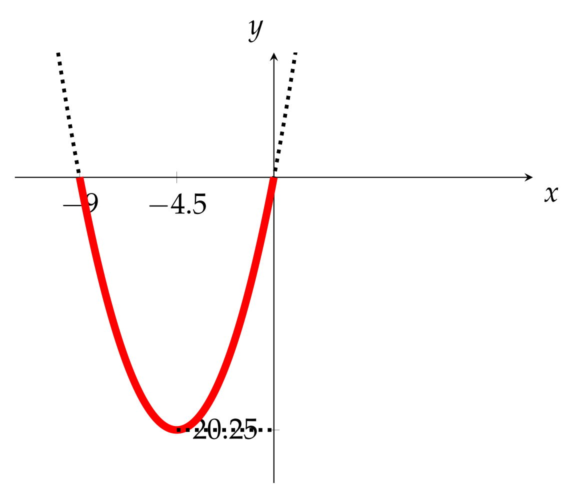
a) a $Im = [-1, \infty]$.



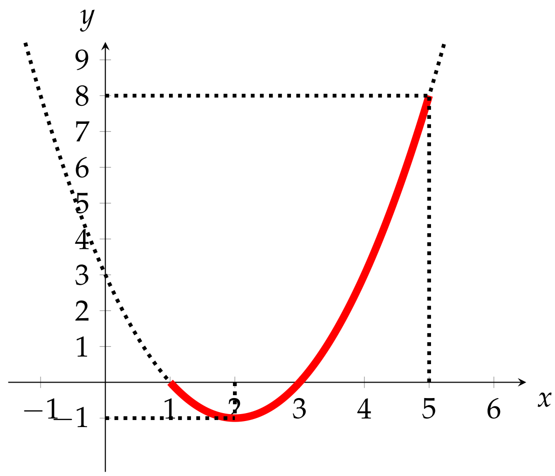
b) a $Im = \left]\infty, \frac{25}{4}\right]$.



c) a $Im = \left[-\frac{81}{4}, 0\right]$.



13. (Extraído do vestibular da ESPM (SP) − 2015)
Esboçando o gráfico, obtemos:



Assim, concluímos que $Im = [-1, 8]$.

14. (Adaptado do Exame de Acesso do PROFMAT − 2013)
Observe que a abscissa do vértice $x_V = 3$, o que permite concluir que os extremos do segmento dado são os pontos $(1, y_1)$ e $(5, y_2)$, com $y_1 = y_2$. Substituindo $x = 1$ ou $x = 5$ na lei dada, encontramos $y_1 = y_2 = 6$ e essa é a distância do segmento dado ao eixo das abscissas.

15. (Adaptado do vestibular da UECE − 2015)
Fazendo as devidas substituições, teremos

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \Leftrightarrow a + b + c = 2 \qquad (1)$$
$$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 5 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 5 \qquad (2)$$
$$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 4 \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 4. \qquad (3)$$

Ao proceder com as subtrações $(2) - (1)$ e $(3) - (1)$ ficaremos com

$$\begin{aligned} 3a + b &= 3 \\ 8a + 2b &= 2, \end{aligned}$$

sistema que resulta em $a = -2$, $b = 9$ e $c = -5$. Portanto,

$$\begin{aligned} f(4) &= -2 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 - 5 \\ f(4) &= -32 + 36 - 5 = -1. \end{aligned}$$

16. (Adaptado do vestibular da FUVEST − 2015**)**
Podemos concluir que uma das raízes é 30 e que a abscissa $x_V = 10$, portanto, a outra raiz é -10, com coordenadas de V dadas por $(10, 200)$. Sendo assim, aplicando a fatoração

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

ficamos com

$$\begin{aligned} y &= a(x - (-10))(x - 30) \\ 200 &= a(10 + 10)(10 - 30) \\ a &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A função é

$$y = -\frac{1}{2} \cdot (x + 10)(x - 30),$$

e, por fim, a altura do lançamento é o termo independente da função, ou seja, $c = 150$.

Elaborado por Tiago Miranda e Cleber Assis
Produzido por Arquimedes Curso de Ensino
contato@cursoarquimedes.com