

Módulo Frações Algébricas

Operações Básicas

8° ano E.F.

Professores Cleber Assis e Tiago Miranda



1 Exercícios Introdutórios

Exercício 1. Simplifique as frações algébricas a seguir.

a) $\frac{16x^2yz^3}{20xy^2}$.

b) $\frac{-5a^3b^2}{15abc^2}$.

c) $\frac{72k^2m^3n^4}{60mnk}$.

d) $\frac{13a^2m}{11am^2n}$.

Exercício 2. Simplifique as frações algébricas abaixo.

a) $\frac{x^2 - x}{x}$.

b) $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

c) $\frac{a - b}{a^2 - 2ab + b^2}$.

d) $\frac{x^2 - 16}{3x + 12}$.

e) $\frac{5x + 35 + 7y + xy}{5 + y}$.

Exercício 3. Efetue as operações, simplificando quando possível.

a) $\frac{5}{x} + \frac{7}{x} + \frac{4}{x}$.

b) $\frac{4y - 1}{x - 2y} - \frac{2y}{4x - 8y}$.

c) $\frac{5}{2k} + \frac{7}{6k} + \frac{4}{k}$.

d) $\frac{2}{a} + \frac{3}{2a} + \frac{4}{3a}$.

Exercício 4. Faça as multiplicações solicitadas.

a) $\frac{x^2}{4y^2} \cdot \frac{24y^5}{x^4}$.

b) $\frac{2}{x} \cdot \frac{3}{2x} \cdot \frac{4}{3x}$.

c) $\frac{8k^3}{3mn^2} \cdot \frac{15m^2n}{4k^2}$.

Exercício 5. Resolva as divisões abaixo.

a) $\frac{4x^2y^3}{6a^3b} : \frac{3xy}{2ab^2}$.

b) $\frac{a + 3}{2a} : \frac{3a + 9}{8a^2}$.

c) $\frac{x^2 - 4}{2x + 8} : \frac{x - 2}{x + 4}$.

2 Exercícios de Fixação

Exercício 6. Simplifique as frações algébricas abaixo.

a) $\frac{2a + 2b}{3a + 3b}$.

b) $\frac{2x - 8}{x^2 - 16}$.

c) $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$.

d) $\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a + b}$.

e) $\frac{a^2 - b^2}{5a + 5b}$.

Exercício 7. Fatore numeradores e denominadores e simplifique as expressões abaixo.

a) $\frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

b) $\frac{m^3 - 27}{5m^2 + 15m + 45}$.

Exercício 8. Efetue as operações, simplificando quando possível.

a) $\frac{a}{x + 1} - \frac{a}{x - 1}$.

b) $\frac{4a^2}{ab + a^2} + \frac{b - 4a}{a + b}$.

c) $\frac{a}{a + 1} + \frac{2}{a^2 - 1} - \frac{2 + 3a}{a - 1}$.

d) $\frac{3a - 3b}{2} \cdot \frac{2a}{a^2 - 2ab + b^2}$.

e) $\frac{x^2}{y - 1} \cdot \frac{5y - 5}{x^4 + x^2}$.

Exercício 9. Dê o que se pede:

a) Fatore $x^2 + 2x + 1$.

b) Determine o MMC entre $(x + 1)$ e $x^2 + 2x + 1$.

c) Resolva $\frac{x}{x + 1} - \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 1}$.

Exercício 10. Resolva a expressão $\frac{a}{a - b} + \frac{2ab}{a^2 - b^2} - \frac{b}{a + b}$.

Exercício 11. Efetue $\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}$, onde $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercício 12. Utilize a ideia do exercício anterior para calcular $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100}$.

Exercício 13. Foram igualmente divididas 660 cartas para serem entregues por x carteiros de uma agência dos Correios. Cada um deles recebeu $\frac{660}{x}$ cartas. No dia seguinte, havia 396 cartas para distribuir; faltaram, porém, dois carteiros. Nesses dois dias, coincidentemente, o número de cartas que cada um dos carteiros recebeu foi igual. Quantos são os carteiros dessa agência?

Exercício 14. Dadas as frações algébricas $A = \frac{2x+1}{x+1}$ e $B = \frac{x-1}{x^2-1}$, determine $A - B$.

Exercício 15. Resolva a expressão $\left(\frac{x}{y^2-x^2} : \frac{1}{3y-3x}\right) \cdot (3x+3y)$, simplificando se possível.

3 Exercícios de Aprofundamento e de Exames

Exercício 16. Qual é o valor da expressão $\frac{2016^2-1}{2015}$?

- a) 1003.
- b) 2003.
- c) 2015.
- d) 2016.
- e) 2017.

Exercício 17. Os números a e b satisfazem a equação $56a = 65b$. Prove que $a + b$ é um número composto. (Obs: a e b são naturais)

Exercício 18. Determine o valor de x , sendo $x = \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{46 \cdot 48} + \frac{1}{48 \cdot 50}$.

Exercício 19. Determine o valor da expressão $\frac{2015^3-1}{1^2+2015^2+2016^2}$.

- a) 1006.
- b) 1007.
- c) 1008.
- d) 2014.
- e) 2015.

Exercício 20. Quantos são os números naturais n tais que $\frac{5n-12}{n-8}$ é também um número natural?

- a) 4.
- b) 5.
- c) 6.
- d) 7.
- e) 8.

Respostas e Soluções.

1.

$$a) \frac{16x^2yz^3}{20xy^2} = \frac{4xz^3}{5y}.$$

$$b) \frac{-5a^3b^2}{15abc^2} = \frac{-a^2b}{3c^2}.$$

$$c) \frac{72k^2m^3n^4}{60mnk} = \frac{6km^2n^3}{5}.$$

$$d) \frac{13a^2m}{11am^2n} = \frac{13a}{11mn}.$$

2.

$$a) \frac{x^2 - x}{x} = \frac{x(x-1)}{x} = x - 1.$$

$$b) \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1.$$

$$c) \frac{a - b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a - b}{(a - b)^2} = \frac{1}{a - b}.$$

$$d) \frac{x^2 - 16}{3x + 12} = \frac{(x+4)(x-4)}{3(x+4)} = \frac{x-4}{3}.$$

$$e) \frac{5x + 35 + 7y + xy}{5 + y} = \frac{5(x+7) + y(7+x)}{5+y} = \frac{(x+7)(5+y)}{5+y} = x + 7.$$

3.

$$a) \frac{5}{x} + \frac{7}{x} + \frac{4}{x} = \frac{16}{x}.$$

$$b) \frac{4y - 1}{x - 2y} - \frac{2y}{4x - 8y} = \frac{16y - 4}{4x - 8y} - \frac{2y}{4x - 8y} = \frac{14y - 4}{4x - 8y} = \frac{7y - 2}{2x - 4y}.$$

$$c) \frac{5}{2k} + \frac{7}{6k} + \frac{4}{k} = \frac{15}{6k} + \frac{7}{6k} + \frac{24}{6k} = \frac{46}{6k} = \frac{23}{3k}.$$

$$d) \frac{2}{a} + \frac{3}{2a} + \frac{4}{3a} = \frac{12}{6a} + \frac{9}{6a} + \frac{8}{6a} = \frac{29}{6a}.$$

4.

$$a) \frac{x^2}{4y^2} \cdot \frac{24y^5}{x^4} = \frac{6y^3}{x^2}.$$

$$b) \frac{2}{x} \cdot \frac{3}{2x} \cdot \frac{4}{3x} = \frac{4}{x^3}.$$

$$c) \frac{8k^3}{3mn^2} \cdot \frac{15m^2n}{4k^2} = \frac{10km}{n}.$$

5.

$$a) \frac{4x^2y^3}{6a^3b} : \frac{3xy}{2ab^2} = \frac{4x^2y^3}{6a^3b} \cdot \frac{2ab^2}{3xy} = \frac{4xy^2b}{9a^2}.$$

$$b) \frac{a+3}{2a} : \frac{3a+9}{8a^2} = \frac{a+3}{2a} \cdot \frac{8a^2}{3(a+3)} = \frac{4a}{3}.$$

$$c) \frac{x^2 - 4}{2x + 8} : \frac{x - 2}{x + 4} = \frac{(x+2)(x-2)}{2(x+4)} \cdot \frac{x+4}{x-2} = \frac{x+2}{2}.$$

6. (Extraído da Vídeo Aula)

$$a) \frac{2a + 2b}{3a + 3b} = \frac{2(a + b)}{3(a + b)} = \frac{2}{3}.$$

$$b) \frac{2x - 8}{x^2 - 16} = \frac{2(x - 4)}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{2}{x + 4}.$$

$$c) \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{x^2(x - 1) + (x - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

$$d) \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{a + b} = \frac{(a + b)^3}{a + b} = (a + b)^2.$$

$$e) \frac{a^2 - b^2}{5a + 5b} = \frac{(a + b)(a - b)}{5(a + b)} = \frac{a - b}{5}.$$

7. (Extraído da Vídeo Aula)

$$a) \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2(x + 1) + (x + 1)} = \frac{(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)}{(x + 1)(x^2 + 1)} = x - 1.$$

$$b) \frac{m^3 - 27}{5m^2 + 15m + 45} = \frac{(m - 3)(m^2 + 3m + 9)}{5(m^2 + 3m + 9)} = \frac{m - 3}{5}.$$

8.

$$a) \frac{a}{x + 1} - \frac{a}{x - 1} = \frac{ax - a - ax - a}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{-2a}{x^2 - 1}.$$

$$b) \frac{4a^2}{ab + a^2} + \frac{b - 4a}{a + b} = \frac{4a^2 + ab - 4a^2}{a(b + a)} = \frac{b}{a + b}.$$

$$c) \frac{a}{a + 1} + \frac{2}{a^2 - 1} - \frac{2 + 3a}{a - 1} = \frac{a^2 - a + 2 - 2a - 2 - 3a^2 - 3a}{(a + 1)(a - 1)} = \frac{-2a^2 - 6a}{a^2 - 1}.$$

$$d) \frac{3a - 3b}{2} \cdot \frac{2a}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{3(a - b)}{2} \cdot \frac{2a}{(a - b)^2} = \frac{3a}{a - b}.$$

$$e) \frac{x^2}{y - 1} \cdot \frac{5y - 5}{x^4 + x^2} = \frac{x^2}{y - 1} \cdot \frac{5(y - 1)}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{5}{x^2 + 1}.$$

9. (Extraído da Vídeo Aula)

$$a) x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

$$b) MMC((x + 1), (x + 1)^2) = (x + 1)^2.$$

$$c) \frac{x}{x + 1} - \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x(x + 1) - (x + 3)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 - 3}{(x + 1)^2}.$$

10.

$$\begin{aligned} \frac{a}{a - b} + \frac{2ab}{a^2 - b^2} - \frac{b}{a + b} &= \\ \frac{a}{a - b} + \frac{2b}{(a + b)(a - b)} - \frac{b}{a + b} &= \\ \frac{a^2 + ab + 2b - ab + b^2}{(a + b)(a - b)} &= \\ \frac{(a + b)^2}{(a + b)(a - b)} &= \frac{a + b}{a - b}. \end{aligned}$$

11. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &= \\ \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} &= \\ \frac{n+1-n}{n(n+1)} &= \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

12. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100} &= \\ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + & \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) &= \\ 1 - \frac{1}{100} &= \frac{99}{100}. \end{aligned}$$

13. Como a quantidade de cartas por carteiro foi a mesma nos dois dias e chamando a quantidade de carteiros de x , temos:

$$\begin{aligned} \frac{660}{x} &= \frac{396}{x-2} \\ 660x - 1320 &= 396x \\ 264x &= 1320 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Portanto, são 5 os carteiros dessa agência.

14.

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{2x+1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2-1} \\ &= \frac{(2x+1)(x-1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2x^2 - 2x + x - 1 - x + 1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2x^2 - 2x}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2x}{x+1}. \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{y^2-x^2} : \frac{1}{3y-3x}\right) \cdot (3x+3y) &= \\ \left(\frac{x}{(y-x)(y+x)} \cdot \frac{3(y-x)}{1}\right) \cdot (3(y+x)) &= \\ \frac{3x}{y+x} \cdot 3(y+x) &= 9x. \end{aligned}$$

16. (Extraído da OBM - 2016)

$$\frac{2016^2 - 1}{2015} = \frac{(2016+1)(2016-1)}{2015} = \frac{2017 \cdot 2015}{2015} = 2017.$$

Resposta E.

17. (Extraído da Vídeo Aula) Se $56a = 65b$, para a e b naturais, então a é múltiplo de 65, pois 56 e 65 são primos entre si. Temos $\frac{a}{65} = \frac{b}{56} = \frac{a+b}{121}$, ou seja, $\frac{a}{a+b} = \frac{65}{121}$. Como 65 e 121 são primos entre si, então a e $a+b$ podem não ser primos entre si e, com isso, $a+b$ é composto; ou a e $a+b$ podem ser primos entre si, então $a+b = 121$, que é composto, ou seja, de qualquer forma, $a+b$ é composto.

18. (Extraído da Vídeo Aula)

$$\begin{aligned} \text{Se } x &= \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{46 \cdot 48} + \frac{1}{48 \cdot 50}, \text{ então} \\ 4x &= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}, \text{ ou seja,} \\ 4x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{23} - \frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{25} = \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{25} &= \frac{23}{25}, \text{ segue que } x = \frac{23}{100}. \end{aligned}$$

19. (Extraído da OBM - 2016)

$$\begin{aligned} \frac{2015^3 - 1}{1^2 + 2015^2 + 2016^2} &= \\ \frac{(2015-1)(2015^2 + 2015 + 1)}{1^2 + 2015^2 + (2015+1)^2} &= \\ \frac{(2015-1)(2015^2 + 2015 + 1)}{1^2 + 2015^2 + 2015^2 + 2 \cdot 2015 + 1} &= \\ \frac{(2015-1)(2015^2 + 2015 + 1)}{2(2015^2 + 2015 + 1)} &= \\ \frac{2014}{2} &= 1007. \end{aligned}$$

Resposta B.

20. (Extraído da OBMEP - 2016)

$$\begin{aligned} \frac{5n-12}{n-8} &= \\ \frac{5n-12-28+28}{n-8} &= \\ \frac{5n-40+28}{n-8} &= \\ \frac{5n-40}{n-8} + \frac{28}{n-8} &= \\ \frac{5(n-8)}{n-8} + \frac{28}{n-8} &= 5 + \frac{28}{n-8}. \end{aligned}$$

Assim, $\frac{28}{n-8}$ deve ser natural, ou seja, $(n-8)$ deve ser divisor positivo de 28, segue que n pode ser 9, 10, 12, 15, 22, 36, ou seja, 6 valores para n . Resposta C.

ELABORADO POR CLEBER ASSIS E TIAGO MIRANDA
PRODUZIDO POR ARQUIMEDES CURSO DE ENSINO
CONTATO@CURSOARQUIMEDIOS.COM